

MATEMÁTICA

89 d

Um reservatório, com 40 litros de capacidade, já contém 30 litros de uma mistura gasolina/álcool com 18% de álcool. Deseja-se completar o tanque com uma nova mistura gasolina/álcool de modo que a mistura resultante tenha 20% de álcool. A porcentagem de álcool nessa nova mistura deve ser de:

- a) 20% b) 22% c) 24% d) 26% e) 28%

Resolução

Nos 30 litros iniciais de mistura temos 18% . 30 ℓ de álcool. Nos 10 litros restantes temos x litros de álcool. Com o tanque completo teremos 40 litros de mistura, com 20% de álcool. Assim sendo, $18\% \cdot 30 \ell + x \ell = 20\% \cdot 40 \ell \Leftrightarrow 5,4 + x = 8 \Leftrightarrow x = 2,6$

A porcentagem de álcool nos dez litros de mistura a ser acrescentado é $\frac{2,6}{10} = 0,26 = 26\%$.

90 c

Um estacionamento cobra R\$ 6,00 pela primeira hora de uso, R\$ 3,00 por hora adicional e tem uma despesa diária de R\$ 320,00. Considere-se um dia em que sejam cobradas, no total, 80 horas de estacionamento. O número mínimo de usuários necessário para que o estacionamento obtenha lucro nesse dia é:

- a) 25 b) 26 c) 27 d) 28 e) 29

Resolução

Se x é o número de usuários então x é o número de primeiras horas e sendo y o número de horas adicionais, tem-se:

$$\begin{cases} 6x + 3y > 320 \\ x + y = 80 \Leftrightarrow y = 80 - x \end{cases}$$

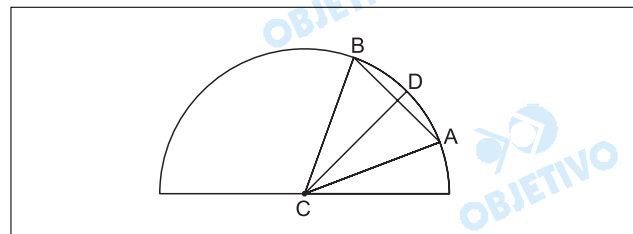
$$6x + 3(80 - x) > 320 \Leftrightarrow 6x + 240 - 3x > 320 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x > 80 \Leftrightarrow x > \frac{80}{3} = 26,66...$$

O número mínimo de usuários para que haja lucro é 27.

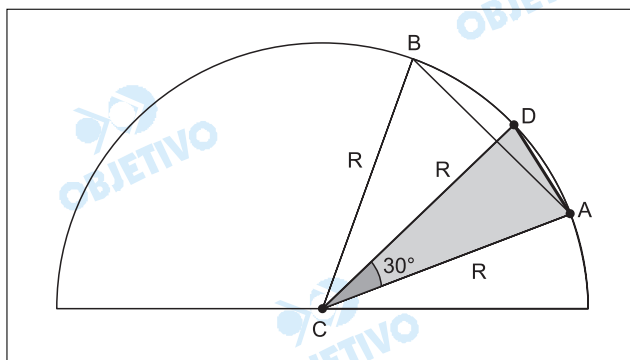
91 a

Em uma semi-circunferência de centro C e raio R, inscreva-se um triângulo equilátero ABC. Seja D o ponto onde a bissetriz do ângulo ACB intercepta a semi-circunferência. O comprimento da corda AD é:



- a) $R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ b) $R\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ c) $R\sqrt{\sqrt{2} - 1}$
d) $R\sqrt{\sqrt{3} - 1}$ e) $R\sqrt{3 - \sqrt{2}}$

Resolução



No triângulo ACD, tem-se:

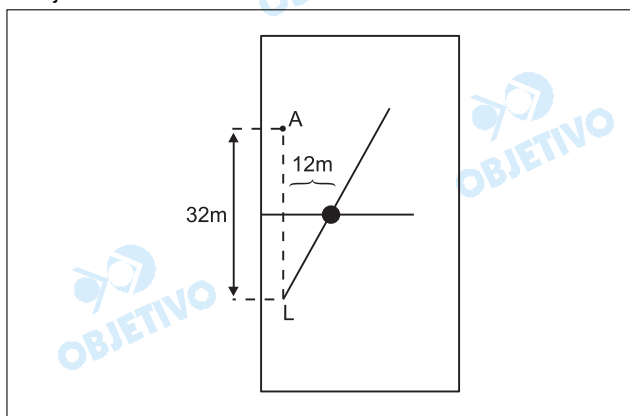
$$(AD)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 30^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (AD)^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (AD)^2 = R^2 \cdot (2 - \sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD = R \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

92 b

Um lateral L faz um lançamento para um atacante A, situado 32 m à sua frente em uma linha paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral e quando passa pela linha de meio do campo está a uma distância de 12m da linha que une o lateral ao atacante. Sabendo-se que a linha de meio do campo está à mesma distância dos dois jogadores, a distância mínima que o atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória da bola será de:



- a) 18,8m b) 19,2m c) 19,6m d) 20m e) 20,4m

Resolução

A menor distância do atacante à trajetória da bola está na perpendicular à trajetória que contém a posição do atacante. Na figura seguinte é a medida do segmento $\overline{AP}$. Assim, considerando os dados da figura em metros, temos:

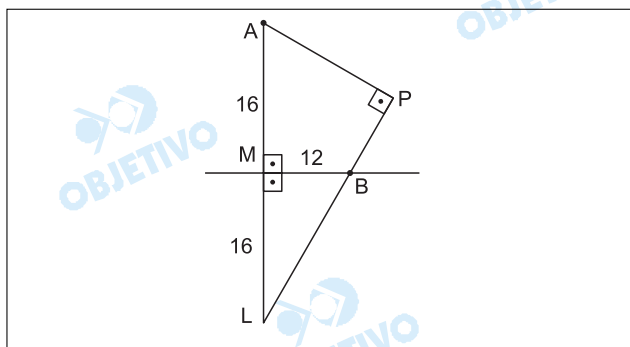
1) No triângulo LMB, retângulo em M,

$$(LM)^2 + (MB)^2 = (LB)^2 \Rightarrow 16^2 + 12^2 = (LB)^2 \Rightarrow LB = 20$$

2) Da semelhança dos triângulos LPA e LMB,

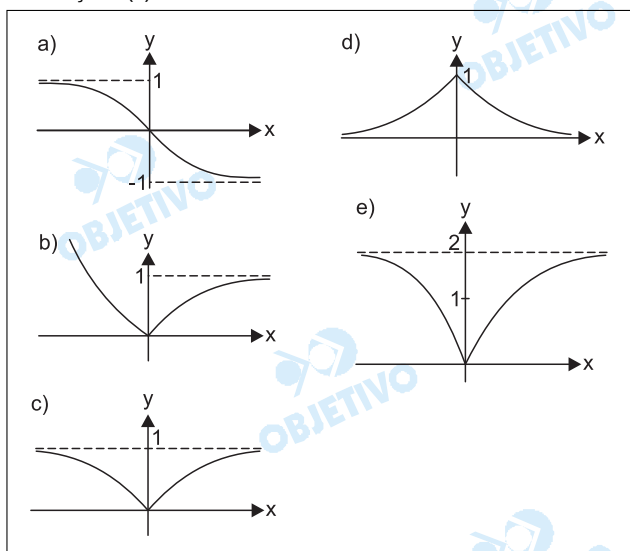
$$\frac{AP}{BM} = \frac{AL}{BL} \Rightarrow \frac{AP}{12} = \frac{32}{20} \Leftrightarrow AP = \frac{96}{5} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow AP = 19,2$$



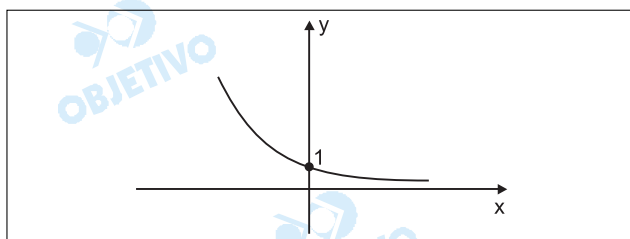
93 c

Das alternativas abaixo, a que melhor corresponde ao gráfico da função $f(x) = 1 - 2^{-|x|}$ é:

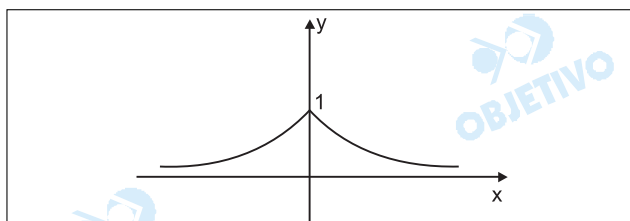


Resolução

1) O gráfico da função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é

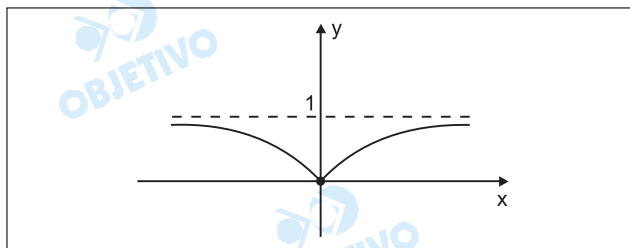


2) O gráfico da função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ é



3) O gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - 2^{-|x|}$ é

$$\Leftrightarrow f(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} \text{ é}$$



94 e

Um número racional r tem representação decimal da forma $r = a_1a_2a_3$ onde $1 \leq a_1 \leq 9$, $0 \leq a_2 \leq 9$, $0 \leq a_3 \leq 9$.

Supondo-se que:

- a parte inteira de r é o quádruplo de a_3 ,
- a_1, a_2, a_3 estão em progressão aritmética,
- a_2 é divisível por 3,

então a_3 vale:

- a) 1 b) 3 c) 4 d) 6 e) 9

Resolução

Seja $r = a_1a_2a_3$, com $1 \leq a_1 \leq 9$, $0 \leq a_2 \leq 9$ e $0 \leq a_3 \leq 9$, tal que:

$$\begin{cases} 10a_1 + a_2 = 4a_3 \\ 2a_2 = a_1 + a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{a_2}{2} \\ a_3 = \frac{3a_2}{2} \end{cases}$$

Como a_2 é múltiplo de 3 e $a_1 = \frac{a_2}{2} \in \mathbb{N}^*$, concluímos que

$$a_2 = 6. \text{ Logo } a_3 = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$$

95 d

Se x é um número real, $x > 2$ e $\log_2(x-2) - \log_4 x = 1$, então o valor de x é:

- a) $4 - 2\sqrt{3}$ b) $4 - \sqrt{3}$ c) $2 + 2\sqrt{3}$
d) $4 + 2\sqrt{3}$ e) $2 + 4\sqrt{3}$

Resolução

Sendo $x > 2$, temos:

$$\log_2(x-2) - \log_4 x = 1 \Leftrightarrow \log_2(x-2) - \frac{\log_2 x}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \log_2(x-2) - \log_2 x = 2 \Leftrightarrow \log_2 \left[\frac{(x-2)^2}{x} \right] = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{3} \Rightarrow x = 4 + 2\sqrt{3} \text{ pois } x > 2$$

96 e

Uma matriz real A é ortogonal se $AA^t = I$, onde I indica a

matriz identidade e A^t indica a transposta de A . Se

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{bmatrix} \text{ é ortogonal, então } x^2 + y^2 \text{ é igual a:}$$

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{3}{2}$

Resolução

$$1) A \cdot A^t = I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & y \\ x & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + x^2 & \frac{1}{2}y + xz \\ \frac{1}{2}y + xz & y^2 + z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} + x^2 = 1 \\ \frac{1}{2}y + xz = 0 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}y = -xz \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

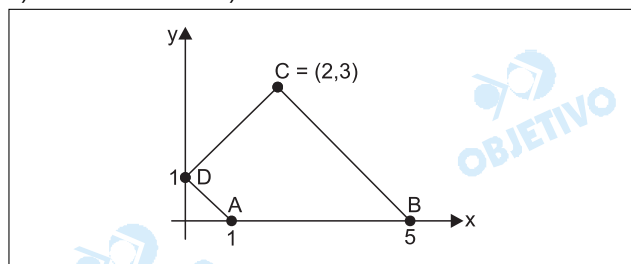
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{4} \\ y^2 = 4x^2z^2 \\ z^2 = 1 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{4} \\ y^2 = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot (1 - y^2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{4} \\ y^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$$

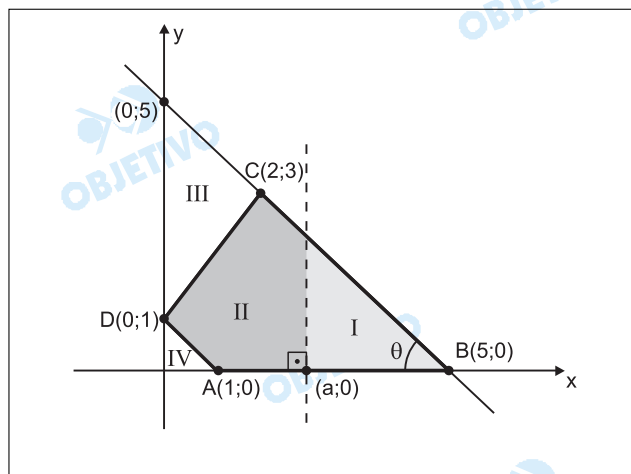
97 b

Duas irmãs receberam como herança um terreno na forma do quadrilátero ABCD, representado abaixo em um sistema de coordenadas. Elas pretendem dividi-lo, construindo uma cerca reta perpendicular ao lado AB passando pelo ponto $P = (a, 0)$. O valor de a para que se obtenham dois lotes de mesma área é:

- a) $\sqrt{5} - 1$ b) $5 - 2\sqrt{2}$ c) $5 - \sqrt{2}$
d) $2 + \sqrt{5}$ e) $5 + 2\sqrt{2}$



Resolução



Notando que a reta que passa pelos pontos $(5;0)$ e $(2;3)$ tem coeficiente angular igual a -1 , então o ângulo θ é igual a 45° . A partir do enunciado, temos:

$$1) A_I = A_{II} = \frac{(5-a)^2}{2}$$

$$2) A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$$

$$\text{Portanto: } \frac{(5-a)^2}{2} + \frac{(5-a)^2}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{25}{2}$$

$$\Leftrightarrow$$

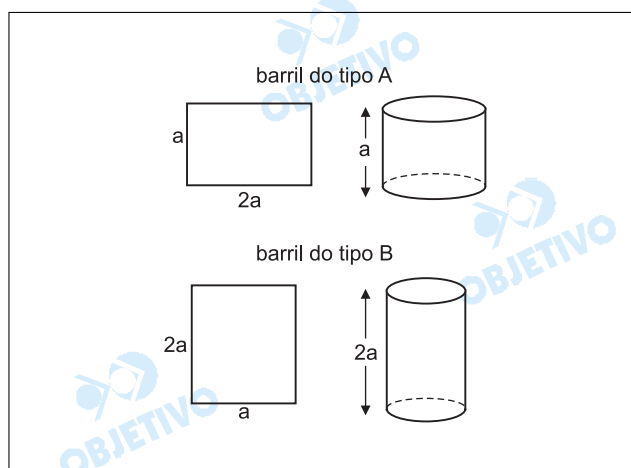
$$\Leftrightarrow (5-a)^2 = 8 \Rightarrow 5-a = 2\sqrt{2} \text{ (pois } a < 5) \Leftrightarrow a = 5 - 2\sqrt{2}$$

98 a

Uma metalúrgica fabrica barris cilíndricos de dois tipos, A e B, cujas superfícies laterais são moldadas a partir de chapas metálicas retangulares de lados a e $2a$, soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado ao lado.

Se V_A e V_B indicam os volumes dos barris do tipo A e B, respectivamente, tem-se:

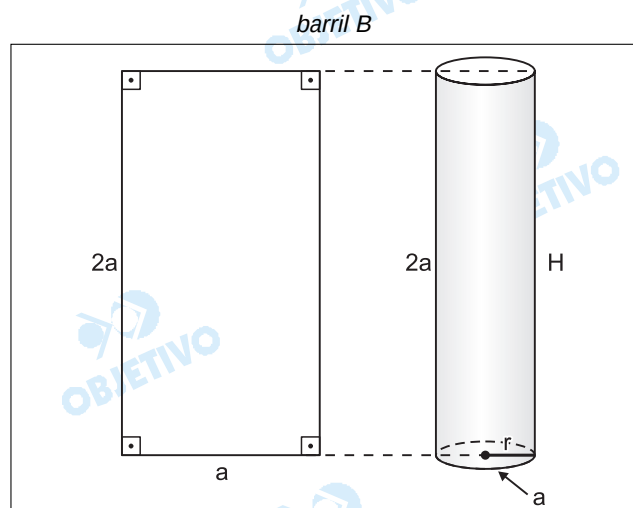
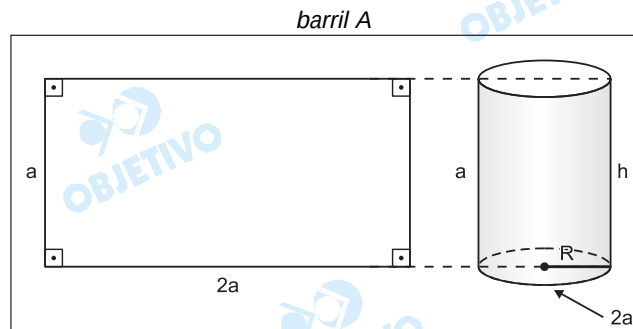
- a) $V_A = 2V_B$ b) $V_B = 2V_A$ c) $V_A = V_B$
d) $V_A = 4V_B$ e) $V_B = 4V_A$



Resolução

OBJETIVO

FUVEST - (1ª Fase) Novembro / 2003



Sendo h e H as alturas dos barris A e B, respectivamente, tem-se: $h = a$ e $H = 2a$.

Assim: $H = 2h$

Sendo R e r os raios das bases dos barris A e B, respectivamente, tem-se:

$$1) 2\pi R = 2a \Leftrightarrow R = \frac{a}{\pi}$$

$$2) 2\pi r = a \Leftrightarrow r = \frac{a}{2\pi}$$

Assim: $R = 2r$

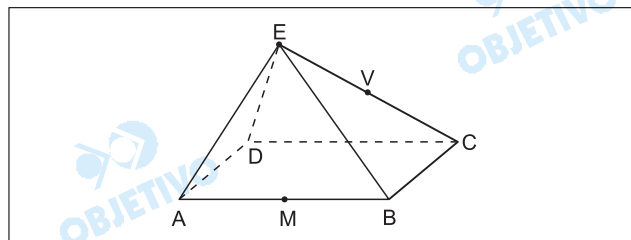
Finalmente, sendo V_A e V_B , respectivamente, os volumes desses barris tem-se:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\pi R^2 h}{\pi r^2 H} \Leftrightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{(2r)^2 h}{r^2 2h} \Leftrightarrow \frac{V_A}{V_B} = 2 \Leftrightarrow V_A = 2V_B$$

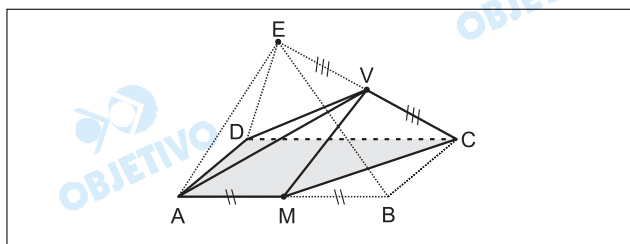
99 b

A pirâmide de base retangular ABCD e vértice E representada na figura tem volume 4. Se M é o ponto médio da aresta $\overline{AB}$ e V é o ponto médio da aresta $\overline{EC}$, então o volume da pirâmide de base AMCD e vértice V é:

- a) 1 b) 1,5 c) 2 d) 2,5 e) 3



Resolução



De acordo com o enunciado pode-se concluir que a área da base (A_b) da pirâmide AMCDV é $\frac{3}{4}$ da área da base (A_B) da

pirâmide ABCDE e que a altura h da pirâmide AMCDV é metade da altura H da pirâmide ABCDE.

Assim, sendo v o volume da pirâmide AMCDV, tem-se:

$$v = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot A_B \cdot \frac{1}{2} \cdot H = \frac{A_B \cdot H}{8}$$

$$\text{Por outro lado: } \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H = 4 \Leftrightarrow A_B \cdot H = 12$$

$$\text{Logo: } v = \frac{12}{8} = 1,5$$

100 c

Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?

- a) 12 b) 18 c) 36 d) 72 e) 108

Resolução

- 1) Como há 4 serviços e 3 empresas, nas condições do problema, uma das empresas fará 2 serviços.
- 2) Das 3 empresas, há $C_{3,1}$ maneiras de escolher a empresa que fará os 2 serviços.
- 3) Dos 4 serviços, há $C_{4,2}$ maneiras de escolher os 2 serviços que serão feitos por aquela empresa.
- 4) Os outros dois serviços poderão ser permutados pelas duas outras empresas.

Logo, os trabalhos podem ser distribuídos de

$$C_{3,1} \cdot C_{4,2} \cdot P_2 = 3 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 2 = 36 \text{ maneiras.}$$

Comentário

Com sete testes de álgebra, três de geometria, um de trigonometria e um de geometria analítica, todos muito bem enunciados, a banca examinadora organizou uma excelente prova de Matemática, na qual podemos destacar os seguintes pontos:

- 1º) A originalidade de alguns testes.
- 2º) A precisão de todos os enunciados.
- 3º) A abrangência relativa do programa exigido.
- 4º) O cunho prático de algumas questões.

